

## Εξέταση Ιουνίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 3

**Στοιχειοθεσία Θεμάτων:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Υπάρχουν δύο θέματα ανάπτυξης (χρόνος 30 λεπτά) και δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και σωστού λάθους (χρόνος 60 λεπτά). Σε κάθε ερώτηση πολλαπλής επιλογής, μία είναι η σωστή απάντηση. Τέλος, κάθε ανάπτυξης βαθμολογείται με άριστα την 1 μονάδα ενώ κάθε ερώτηση με 0,2 μονάδες.

**Ανάπτυξης 1.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & , \quad xy > 0 \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

Εξετάστε τη συνάρτηση  $f$  σε κάθε σημείο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισμότητα, διαφορισμότητα, συνεχή διαφορισμότητα και ύπαρξη παραγώγων κατά κατεύθυνση.

**Ανάπτυξης 2.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(u, v) = \cos u \sin v$  και  $\bar{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με

$$\bar{T}(s, t) = \begin{pmatrix} \sin(t^2 s) \\ \ln \sqrt{1 + s^2} \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε το  $\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \bar{T})(1, 0)$ .

**Ερώτηση 1.** Το σύνολο  $D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\bar{x}\| \leq 1\}$  είναι

- (i) ανοιχτό,
- (ii) κλειστό,
- (iii) κανένα από τα παραπάνω.

**Ερώτηση 2.** (Σωστό ή Λάθος;) Υπάρχουν  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  για τα οποία ισχύει  $\|\bar{x}\|_2 = \|\bar{x}\|_1 = \|\bar{x}\|_\infty$ .

**Ερώτηση 3.** Έστω  $U = B(\bar{0}, r) \subset \mathbb{R}^2, r > 0$  και  $f \in C^2(\bar{U})$  με  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) > 0$ , για κάθε  $(x, y) \in U$ . Η συνάρτηση  $f$  λαμβάνει μέγιστο

- (i) μόνο στα συνοριακά σημεία του συνόλου  $U$ ,
- (ii) ενδεχομένως και στο  $U$  και στο σύνορο του,
- (iii) μόνο σε σημεία του  $U$ .

**Ερώτηση 4.** Έστω η συνάρτηση  $f: \bar{B}(\bar{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $B(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$  και τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\|\bar{x}\| - 1} & , \quad \bar{x} \in B(\bar{0}, 1) \\ 0 & , \quad \bar{x} \in \partial B(\bar{0}, 1) \end{cases}$$

Η  $f$  λαμβάνει

- (i) και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο,

(ii) μόνο τοπικά ακρότατα, αλλά κανένα ολικό ακρότατο,

(iii) ολικά και τοπικά μέγιστα, αλλά όχι τοπικά ελάχιστα.

**Ερώτηση 5.** (Σωστό ή Λάθος;) Για μία  $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$  με  $f(\bar{0}) = 0$ ,  $\nabla f(\bar{0}) = \bar{0}$  και  $H_f(\bar{0}) = \mathbf{0}$ , όπου  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ισχύει:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{2} \frac{\partial^3 f(\bar{0})}{\partial x^2 \partial y} + \frac{x y^2}{2} \frac{\partial^3 f(\bar{0})}{\partial x \partial y^2} + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f(\bar{0})}{\partial x^3} + \frac{y^3}{6} \frac{\partial^3 f(\bar{0})}{\partial y^3} + o((x^2 + y^2)^{3/2}),$$

για  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

**Ερώτηση 6.** Η  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$  στο σημείο μηδέν

(i) έχει μερικές παραγώγους αλλά δεν είναι διαφορίσιμη,

(ii) δεν έχει μερικές παραγώγους αλλά έχει παραγώγους σε άλλες κατευθύνσεις,

(iii) κανένα από τα παραπάνω.

**Ερώτηση 7.** (Σωστό ή Λάθος;) Έστω  $U$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και  $\bar{x}_0 \in U$  και  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Αν για κάποιο μοναδιαίο  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$  υπάρχει το  $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\frac{\partial f}{\partial(-\bar{v})}(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}_0).$$

**Ερώτηση 8.** Έστω  $h = f \circ g$ , όπου  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τύπο  $f(x) = |x|$  και  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  έχει τύπο  $g(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$ , με  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  θετικά ημιόρισμένος πίνακας. Τότε, η  $h$  είναι

(i) δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της,

(ii) δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο μηδέν.

**Ερώτηση 9.** Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \text{ ή } y = 2 \\ 2 & , \quad \text{αλλού} \end{cases},$$

στο σημείο  $(1, 2)$  είναι

(i) μερικώς διαφορίσιμη,

(ii) μερικώς διαφορίσιμη και συνεχής,

(iii) τίποτα από τα παραπάνω.

**Ερώτηση 10.** Το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+2) + (y+1)^2}{x^2 + y^2 + 2(y-x+1)}$$

(i) ισούται με 2,

(ii) ισούται με 1,

(iii) ισούται με 1/2,

(iv) δεν υπάρχει.